

ترکیب دو شرطی (Biconditional) (\leftrightarrow , \Leftrightarrow)

اگر P و Q دو گزاره‌ی دلخواه باشند، گزاره‌ی $P \leftrightarrow Q$ («P اگر و فقط اگر Q» می‌خوانند) را گزاره‌ی ترکیب دو شرطی گویند و گاهی به صورت اختصاری «P iff Q» نیز نشان می‌دهند. گزاره‌ی ترکیب دو شرطی $P \leftrightarrow Q$ فقط هنگامی ارزش T دارد که P و Q هر دو دارای ارزش یکسان باشند. در زبان فارسی گزاره‌ی ترکیب دو شرطی را به صورت «P شرط لازم و کافی برای Q است» بیان می‌کنند. جدول درستی این ترکیب به صورت زیر است:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

مثال) جدول زیر ارزش فرمول گزاره‌ای $\sim(P \wedge Q) \leftrightarrow (\sim P \vee \sim Q)$ را تشکیل می‌دهد.

P	Q	$P \wedge Q$	$\sim(P \wedge Q)$	$\sim P$	$\sim Q$	$\sim P \vee \sim Q$	$\sim(P \wedge Q) \leftrightarrow (\sim P \vee \sim Q)$
T	T	T	F	F	F	F	T
T	F	F	T	F	T	T	T
F	T	F	T	T	F	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

با توجه به جدول معلوم می‌شود که ارزش فرمول مستقل از دو متغیر P و Q می‌باشد. یعنی فرمول به ازای تمام ارزشهای ممکن برای متغیرهای P و Q دارای ارزش T می‌باشد.

فرمول گزاره‌ای همیشه راست (Tautology)

فرمول گزاره‌ای را که مستقل از ارزش گزاره‌های معینی که جایگزین متغیرهای آن می‌شوند دارای ارزش راست باشد، فرمول گزاره‌ای همیشه راست (Taut) گویند. به عبارت دیگر جدول درستی این فرمولها در همه‌ی حالتها خروجی T دارد. مثال) فرمول $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\sim P \vee Q)$ یک فرمول گزاره‌ای همیشه راست است.

فرمول گزاره‌ای همیشه دروغ (Contradiction)

تعریف فرمول Cont دقیقاً بر خلاف فرمول Taut است و خروجی جدول درستی آن در همه حالتها F است. مثال) فرمول $P \wedge \sim P$ یک فرمول گزاره‌ای همیشه دروغ است.

فرمول‌های هم ارز (Equivalence of Formulas) (\Leftrightarrow, \equiv)

فرض کنیم A و B دو فرمول گزاره‌ای و P_1, P_2, \dots, P_n همه‌ی متغیرهای ظاهر شده در A و B باشند اگر به ازای هر یک از 2^n ترکیبات ارزش ممکن برای متغیرها، ارزش دو فرمول A و B یکسان باشد آنگاه گوییم A و B هم‌ارزند و آن را به صورت " $A \Leftrightarrow B$ " نشان می‌دهند.

(مثال)

$\sim \sim P$ با P هم‌ارز است. $P \vee P$ با P هم‌ارز است. $(P \wedge \sim P) \vee Q$ با Q هم‌ارز است.

طریقه‌ی تشخیص هم‌ارزی دو فرمول A و B :

- ۱- تشکیل جدول ارزش دو فرمول A و B و مقایسه‌ی داراییه‌های ستون آخر آنها.
- ۲- استفاده از جدول ارزش ترکیب دو شرطی $A \leftrightarrow B$ ، در صورتی که دو فرمول A و B هم‌ارز باشند باید $A \leftrightarrow B$ یک T باشد. در صورتی که دو فرمول A و B هم‌ارز باشند آن را به صورت « $A \Leftrightarrow B$ » نشان می‌دهند که « $A \Leftrightarrow B$ » یک گزاره نیست. یعنی علامت \Leftrightarrow لفظ پیوند دهنده نیست و از اعمال آن بر روی گزاره‌ها، گزاره‌ی جدیدی بوجود نمی‌آید.

فرمولهای هم‌ارزی مهم

$P \vee P \Leftrightarrow P$	قانون خود توانی	$P \wedge P \Leftrightarrow P$
$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$	شرکت پذیری	$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$	جابجایی	$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	توزیع پذیری	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
$P \vee F \Leftrightarrow P$	همانی (عضو خنثی)	$P \wedge T \Leftrightarrow P$
$P \vee T \Leftrightarrow T$	عضو صفر	$P \wedge F \Leftrightarrow F$
$P \vee \sim P \Leftrightarrow T$	مکمل (عضو وارون)	$P \wedge \sim P \Leftrightarrow F$
$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$	جذب	$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$
$\sim(P \vee Q) \Leftrightarrow \sim P \wedge \sim Q$	دمورگان	$\sim(P \wedge Q) \Leftrightarrow \sim P \vee \sim Q$
$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \sim P \vee Q$ $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \sim Q \rightarrow \sim P$ $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R \Leftrightarrow Q \rightarrow (P \rightarrow R)$ $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \Leftrightarrow (\sim P \vee Q) \wedge (\sim Q \vee P)$		

مثال) نشان دهید که فرمولهای زیر باهم هم ارز هستند؛

$$(\sim P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow \sim Q \Leftrightarrow Q \rightarrow P$$

پاسخ:

$$\begin{aligned} & (\sim P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow \sim Q \\ \Leftrightarrow & (\sim P \wedge (\sim P \vee Q)) \rightarrow \sim Q \\ \Leftrightarrow & \sim P \rightarrow \sim Q \\ \Leftrightarrow & Q \rightarrow P \end{aligned}$$

استلزام منطقی (Tautological Implication)

بر خلاف لفظهای پیوند دهنده عطفی، فصلی و دو شرطی که دارای تقارن (Symmetric) هستند، ترکیب شرطی این خاصیت را دارا نمی باشد و برای بررسی نمودن درست بودن یک عبارت که دارای ترکیب های شرطی است از استلزامها استفاده می شود. (خاصیت تقارن یعنی: $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$)

قواعد مهم در استلزام

- ۱- قاعده استنتاج یا استثناء
 $P, P \rightarrow Q \vdash Q$
- ۲- قاعده تعدی
 $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$
- ۳- قاعده فصلی
 $P \vee Q \vdash Q, P \vdash P \vee Q$
- ۴- قاعده عطفی
 $Q \vdash P \vee Q, P, Q \vdash P \wedge Q$
- ۵- قاعده تخصیص
 $P \wedge Q \vdash P \mid Q$
- ۶- قاعده معکوس (عکس)
 $P \rightarrow Q, \sim Q \vdash \sim P$

* قاعده ۶ به این مفهوم است که اگر P به نتیجه F منجر شود، آنگاه خود P، نادرست است.

* استدلال غلط، استدلالی است در برخی حالات که همه فرض های آن صحیح است، تالی غلط باشد.

مثال) اگر علی در امتحان گسسته نمره الف بگیرد، پدرش برای او یک هدیه می گیرد. پدر علی هدیه را گرفته است؛ آیا می توان نتیجه گرفت نمره ی علی الف شده باشد؟

پاسخ: P: علی در درس ساختمان گسسته نمره ی الف بگیرد. Q: پدر علی هدیه را خریده است.

آیا می توان نتیجه گرفت که علی نمره الف گرفته؟ $(P \rightarrow Q) \wedge Q$

P	Q	$P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge Q$	$((P \rightarrow Q) \wedge Q) \rightarrow P$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	T

مثال ۱) با استفاده از روش مستقیم (قواعد استنتاج) ثابت کنید عبارت زیر یک عبارت همیشه راست است!

$$[(P \rightarrow Q) \wedge (\sim R \rightarrow \sim Q) \wedge \sim R] \rightarrow \sim P$$

شماره	گزاره	قانون مورد استفاده
1	$P \rightarrow Q$	فرض ۱
2	$\sim Q \rightarrow \sim P$	هم ارزی ۱
3	$\sim R \rightarrow \sim Q$	فرض ۲
4	$\sim R \rightarrow \sim P$	از شماره ۲ و ۳ و قانون تعدی
5	$\sim R$	فرض ۳
6	$\sim P$	از شماره ۴ و ۵ و قاعده استنتاج

* دقت شود که هر چیزی در ستون وسط جدول فوق ظاهر می شود حتماً درست (Taut) است که ظاهر گردیده است و ترکیب عطفی آنها همواره T است!

مثال ۲) نشان دهید که $R \wedge (P \vee Q)$ نتیجهی معتبری از فرضهای زیر است؛

$$P \vee Q, \quad Q \rightarrow R, \quad P \rightarrow S, \quad \sim S$$

شماره	گزاره	قانون مورد استفاده
1	$P \rightarrow S$	فرض ۱
2	$\sim S$	فرض ۲
3	$\sim P$	از شماره ۱ و ۲ و قاعده عکس
4	$P \vee Q$	فرض ۳
5	$\sim P \rightarrow Q$	هم ارزی ۴
6	Q	شماره ۳ و ۵ و قاعده استنتاج
7	$Q \rightarrow R$	فرض ۴
8	R	شماره ۶ و ۷ و قاعده استنتاج